Ю. Н. Штейников

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
yuriisht@gmail.com

ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ ПО ПОДГРУППАМ

Мы будем рассматривать следующую задачу. Пусть Γ – подгруппа $\mathbb{Z}_p^*$, $a \in \mathbb{Z}_p^*, e_p(x) := e^{2\pi i x/p}$, p – достаточно большое простое число. Требуется нетривиально оценить модуль суммы: $S(a,\Gamma) = \sum_{x\in\Gamma} e_p(ax)$, где $S(\Gamma) := \max_{a\in\mathbb{Z}_p^*} |S(a,\Gamma)|$.

Важной задачей является установление нетривиальных по порядку верхних оценок для $S(\Gamma) : S(\Gamma) = o(|\Gamma|)$, $p \to \infty$.

В монографии С. В. Конягина и И. Е. Шпарлинского [2] приведены задачи, где применяются такие суммы. Интерес к ним был вызван их приложением к проблеме Варинга [6]. Оценки таких сумм полезны и для аддитивных задач по простому модулю.

Оценками $S(a,\Gamma)$ занимались С. В. Конягин, Д. Р. Хиф-Браун [1], И. Д. Шкредов [4]. В частности были доказаны нетривиальные по порядку верхние оценки для $S(\Gamma)$ для подгрупп $|\Gamma| > p^{1/4+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число. Случай малых подгрупп $|\Gamma| > p^{\varepsilon}$ был исследован в [3].

В этой работе получены новые верхние оценки тригонометрических сумм по подгруппам $\Gamma \subset \mathbb{Z}_p^*$, размер которых принадлежит $[p^{\frac{28}{95}}, p^{\frac{182}{487}}]$. Для мультипликативной группы $\Gamma \subset \mathbb{Z}_p^*$ введем по определению величину

$$T_k(\Gamma) := \{x_1, \ldots, x_{2k} \in \Gamma : x_1 + \ldots + x_k = x_{k+1} + \ldots + x_{2k}\}.$$

Такие оценки для $S(\Gamma)$ могут быть получены с помощью оценок для величин $T_k(\Gamma)$.

Мы будем развивать идеи указанных работ и усилим оценку для величины $T_3(\Gamma)$ и для $S(\Gamma)$. Также упомянем некоторые их следствия.

Теорема 1. *При $t < p^{1/2}$ справедлива слудующая оценка:*

$$T_3(G) \ll t^{4\frac{3}{14}}(\log t)^{12/7}.$$

Теорема 2. *Справедливы неравенства:*

$$\begin{cases} p^{\frac{182}{515}} < t < p^{\frac{182}{487}} \Rightarrow S(\Gamma) \ll p^{\frac{1}{12}} t^{\frac{1579}{2184}} (\log t)^{\frac{1067}{5460}}; \\ p^{\frac{56}{185}} < t < p^{\frac{182}{515}} \Rightarrow S(\Gamma) \ll p^{\frac{1}{18}} t^{\frac{101}{126}} (\log t)^{\frac{4}{21}}; \\ p^{\frac{28}{95}} < t < p^{\frac{56}{185}} \Rightarrow S(\Gamma) \ll p^{\frac{1}{24}} t^{\frac{1139}{1344}} (\log t)^{\frac{1}{14}}. \end{cases}$$

Суммы $S(a,\Gamma)$ можно рассматривать по степени простого числа. Метод из работы [5] позволяет получать оценки для таких сумм. В качестве приложения мы получим нетривиальный результат о первом натуральном числе, частное Ферма которого не обладает свойством делимости на квадрат простого.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00332), Минобрнауки РФ (проект № 8215).

ЛИТЕРАТУРА

1. Конягин С. В. *Оценки тригонометрических сумм по подгруппам и сумм Гаусса* // Тр. Тульской междунар. конф. по теории чисел. – Тула, 2001.

2. Konyagin S. V., Shparlinskii I. E. *Character sums with exponential functions.* – Cambridge University Press, 1999.

3. Bourgain J., Konyagin S. V. *Estimates for the number of sums and products and for exponential sums over subgroups in fields of prime order* // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2003. – V. 337. – P. 75–80.

4. Shkredov I. D. *Some new inequalities in additive combinatorics* // Moscow J. of Combinatorics and Number Theory. – 2014.

5. Малыхин Ю. В. *Оценки тригонометрических сумм по модулю* p^r // Матем. заметки. – 2006. – Т. 80. – № 5. – С. 793–796.

6. Карацуба А. А. *Основы аналитической теории чисел.* – Москва: УРСС, 2004. – 182 с.